Inversibilité dans les algèbres non associatives

Communication au Workshop de Mathématiques,
Mehdia, 23-24 Décembre 2016

A. ROCHDI
Faculté des Sciences Ben M'Sik de Casablanca

.

PLAN

1. **Algèbres non associatives**

2. **Inversibilité dans les algèbres non associatives**

3. **Applications**

Références pertinentes

[BD 73] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras.* Springer-Verlag, (1973).

[J 68] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **39** (1968).

[BK 66] H. Braun, and M. Koecher, *Jordan-Algebren.* Springer-Verlag, (1966).

[K 77] A. M. Kaidi, *Bases para una teoria de las algebras no asociativas normadas.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Spain (1977).

[Mc 65] K. Mc Crimmon, *Norms and noncommutative Jordan algebras.* Pacific J. Math. **15** (1965), 925-956.

[R 94] A. Rochdi, *Algèbres non associatives normées de division. Classification des algèbres réelles de Jordan non commutatives de division linéaire de dimension* 8. Thèse Doctorale, Université Mohamed V, Rabat, (1994).

[S 66] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras.* Academic Press, New York (1966).

1. Algèbres non associatives

$\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif de caractéristique nulle.

Définitions 1. Une $\mathbb{K}$-algèbre est un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'une application bilinéaire

$$A \times A \to A \quad (x, y) \mapsto xy$$

dite produit de A. Soit A une algèbre.

(1) A est dite ***alternative*** si $(x^2y) = x(xy)$ et $yx^2 = (yx)x$.

(2) Elle est dite ***de Jordan*** si elle est commutative et pour tous $x, y \in A$: $(x^2y)x = x^2(yx)$.

(3) Elle est dite ***de Jordan non commutative*** si pour tous $x, y \in A$: $(x^2y)x = x^2(yx)$.

(4) Elle est dite ***à puissances associatives*** si pour tout $x \in A$ la sous-algèbre de A engendrée par x est associative.

(5) Elle est dite ***flexible*** si elle satisfait à l'identité $(xy)x = x(yx)$. ∎

L'organigramme suivant illustre la hiérarchie entre ces identités:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \textbf{Associative} & \\
 & & & \Downarrow & \\
 & \textbf{Jordan} & & \textbf{Alternative} & \\
 & \Downarrow & \searrow & \Downarrow & \\
\textbf{Commutative} & & & \textbf{J. n. c.} & \\
 & \Downarrow & \swarrow & & \searrow \\
 & \textbf{Flexible} & & & \textbf{P. A.}
\end{array}$$

Etant donnée une algèbre A. On obtient, moyennant une déformation de son produit, d'autres algèbres:

Définition 1. (Symétrisation). On appelle symétrisation d'une algèbre A et on note A^+ l'algèbre (commutative) ayant pour espave vectoriel sous-jacent A et pour produit

$$x \odot y = \frac{xy + yx}{2}.$$

Si A est de Jordan n.c. alors A^+ est de Jordan. ∎

Procédé de Cayley-Dickson

Définitions 2. Soit A une algèbre à élément unité e.

(1) A est dite quadratique si pour tout $x \in A$ les éléments e, x, x^2 sont linéairement dépendants.

(2) Elle est dite cayleyenne si elle est munie d'une involution $\sigma_A : x \mapsto \overline{x}$ telle que $x + \overline{x},\ x\overline{x} \in \mathbb{R}e$. σ_A est dite l'involution cayleyenne de A et on note (A, σ_A). On définit alors sur l'espace vectoriel $A \times A$ le produit:

$$(x, y) \odot (x', y') = (xx' - \overline{y'}y,\ y\overline{x'} + y'x).$$

L'algèbre $(A \times A, \odot)$ ainsi obtenue est cayleyenne, d'élément unité $(e, 0)$ et de conjugaison cayleyenne $(x, y) \mapsto (\overline{x}, -y)$.

On l'appelle extension cayleyenne de (A, σ_A) et on note $CD(A, \sigma_A)$. La correspondance $A \to A \times A \quad x \mapsto (x, 0)$ est un monomorphisme d'algèbres. ▪

(A, σ_A)	$CD(A, \sigma_A)$	Produit
$(\mathbb{R}, I_{\mathbb{R}})$	$(\mathbb{C}, \sigma_{\mathbb{C}})$: Nombres complexes	Associatif et commutatif
$(\mathbb{C}, \sigma_{\mathbb{C}})$	$(\mathbb{H}, \sigma_{\mathbb{H}})$: Quaternions .	Associatif (non commutatif)
$(\mathbb{H}, \sigma_{\mathbb{H}})$	$(\mathbb{O}, \sigma_{\mathbb{O}})$: Octonions .	Alternatif (non associatif, non commutatif)

2. Inversibilité dans les algèbres non associatives

Définition 2. (Inversibilité linéaire). *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre.*

(1) *Un élément $x \in A$ est dit linéairement inversible si les opérateurs linéaires L_x, R_x, de multiplication par x, sont bijectifs. L'ensemble de tels éléments est noté $L - inv(A)$.*

(2) *Un élément $x \in A$ tel que L_x (resp. R_x) est bijectif est dit l. i. à gauche (resp. à droite) et on note $L - inv_d(A)$ (resp. $L - inv_g(A)$) l'ensemble de tels éléments.*

(3) *Si A n'est pas réduite à $\{0\}$, elle est dite de division linéaire à gauche si $L - inv_g(A) = A - \{0\}$, elle est dite de division linéaire si elle l'est à gauche et à droite.* ▪

Proposition 1. *Soit A une algèbre de dimension finie, alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *A est de division linéaire.*

(2) *A est de division linéaire à gauche.*

(3) *A est de division linéaire à droite.*

(4) *A est sans diviseurs de zéro.* ∎

Note 1. *Une algèbre à puissances associatives sans diviseurs de zéro de dimension finie, contient un élément unité* ([S 66] p. 134). ∎

Il est facile de voir qu'une $\mathbb{K}$-algèbre associative de division linéaire est unitaire. Ce résultat persiste notament pour les algèbres de Jordan n.c.

Lemme 1. *Soit A une algèbre de Jordan n.c. telle que $L - inv_g(A) \neq \emptyset$. Alors A contient un idempotent non nul.* ∎

Corollaire 1. *Soit A une algèbre de Jordan n.c. sans diviseurs de zéro et telle que $L - inv_g(A) \neq \emptyset$. Alors A contient un élément unité.* ∎

Remarque 1. *Ce dernier résultat ne persiste pas en général pour les algèbres non associatives. En effet, l'algèbre $\overset{*}{\mathbb{C}}= (\mathbb{C}, \odot) : x \odot y = \overline{x}\ \overline{x}$, de Mc Clay de division linéaire, commutative contenant un idempotent non nul est non unitaire.* ∎

Définition 3. (J-invertibilité). *Soit A une algèbre de Jordan n.c. unitaire. Un élément $x \in A$ est dit inversible au sens de Jacobson, ou J-inversible, s'il existe $y \in A$, dit inverse de x, tel que*

(1) $xy = yx = 1$ *et*
(2) $x^2y = yx^2 = x$ [Mc 65].

Notons que dans l'algèbre de Jordan unitaire $\mathbb{H}^+ = (\mathbb{H}, \odot)$ l'élément i satisfait à $i \odot (-i) = 1$. Pourtant, c'est un diviseur de zéro:

$$i \odot j = \frac{ij + ji}{2} = 0$$

D'où la nécessité de l'égalité (2). Si A est alternative, les égalités (1) et (2) se réduisent à (1). Les propriétés fondamentales sont données par les deux résultats suivants:

Théorème 1. (Jacobson). *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre de Jordan unitaire et soit x un élément de A. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *x est J-inversible dans A.*

(2) $1 \in U_x(A)$.

(3) *L'opérateur $U_x = 2L_x^2 - L_{x^2}$ est bijectif.*

Dans ces conditions, l'inverse y est unique et on a $y = U_x^{-1}(x)$ [J 68]. ▪

Théorème 2. (Mc Crimmon). *Soit A une algèbre de Jordan n.c. unitaire. Alors un élément $x \in A$ est J-inversible et possède pour inverse $y \in A$ si et seulement si y est l'inverse de x dans l'algèbre de Jordan A^+* [Mc 65]. ▪

Le Théorème ci-dessus montre que la J-inversibilité dans une algèbre A de Jordan n.c. unitaire est la même que dans l'algèbre de Jordan A^+. On notera l'inverse de x par x^{-1} et l'ensemble des éléments J-inversibles de A, par $inv(A)$. ▪

Définition 4. *Soit A une algèbre de Jordan n.c. unitaire. L'algèbre A est dite de J-division si $inv(A) = A - \{0\}$. Une telle algèbre est simple et il en est de même pour l'algèbre de Jordan A^+.* ▪

Théorème 3. (d'Artin avec inverses). *Dans une algèbre alternative unitaire, deux éléments quelconques et leurs inverses, s'il existent, engendrent une sous-algèbre associative* ([K 77] p. 39). ▪

Proposition 2. *Soit A une algèbre de Jordan n.c. unitaire, alors tout élément $x \in A$ linéairement inversible à gauche est J-inversible, d'inverse x^{-1} linéairement inversible à droite et on a $R_{x^{-1}} = U_x^{-1} L_x$* ([K 77] p. 31). ▪

Corollaire 2. *Soit A une algèbre alternative unitaire et soit $x \in A$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *x est J-inversible.*

(2) *x est linéairement inversible.* ▪

L'inversibilité linéaire à gauche coincide avec la J-inversibilité pour les algèbres alternatives unitaires et entraîne cette dernière pour les algèbres de Jordan n.c. unitaires. Cependant ces deux notions d'inversibilité ne sont pas équivalentes pour les algèbres de Jordan, et les contre-exemples existent en abondance ([K] p. 19). ▪

Soit A une algèbre de Jordan n.c. unitaire. Une sous-algèbre B de A, qui contient l'élément unité de A, est dite pleine si $inv(B) = B \cap inv(A)$.

Proposition 3. *Tout élément a d'une algèbre de Jordan n.c. unitaire, est contenu dans une sous-algèbre associative, commutative et pleine. La plus petite sous-algèbre pleine de A qui contient a, notée $\mathbb{K}(a)$, est appelée la sous-algèbre pleine engendrée par a* ([K 77] p. 33). ∎

3. Applications

Définition 5. *Une $\mathbb{C}$-algèbre A est dite normée si l'espace vectoriel est A muni d'une norme $||.||$ telle que $||xy|| \leq ||x||\ ||y||$ pour tous $x, y \in A$.* ∎

Le spectre de tout élément x : $sp_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda.1 \notin inv(A)\}$, d'une $\mathbb{C}$-algèbre associative normée unitaire A, est non vide [BD 73].

Un des résultats classiques de la théorie des $\mathbb{C}$-algèbres de Banach, est le celèbre Théorème de Gelfand-Mazur suivant [BD 73]:

Théorème 4. *Toute $\mathbb{C}$-algèbre associative normée de division est isomorphe à $\mathbb{C}$.* ∎

Comme dans le cas associatif, le spectre d'un élément x d'une $\mathbb{C}$-algèbre A de ***Jordan n.c.*** unitaire est défini par [K 77]:

$$sp_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda 1 \notin inv(A)\}.$$

Ainsi $sp_A(x) = sp_{\mathbb{C}(x)}(x)$ est non vide. On en déduit immédiatement une généralisation du Théorème de Gelfand-Mazur:

Théorème 5. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan non commutative normée unitaire de division. Alors $A \simeq \mathbb{C}$* ([K 77] p. 92). ∎

Nous obtenons, à l'aide de ce résultat, le suivant:

Corollaire 3. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan non commutative normée de division linéaire à gauche. Alors $A \simeq \mathbb{C}$.* ∎

Problème ouvert 1. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre commutative, à puissances associatives normée et de division linéaire. Est ce que A contient un élément unité ?* ∎