

Une approche géométrique pour la K-homologie différentielle et modèles pour la K-homologie à coefficients dans \mathbb{R}/\mathbb{Z}

Adnane Elmrabty

Thèse soutenue le 02 mai 2015 à l'université Ibn Tofail Kénitra

Directeur de thèse: Pr. Mohamed Maghfoul

Abstract

Cette thèse est consacrée à l'étude d'une extension différentielle de la K-homologie de Baum-Douglas $X \mapsto K_*^{geo}(X)$ et du caractère de Chern géométrique $X \mapsto (Ch_*^X : K_*^{geo}(X) \mapsto H_*^{DR}(X))$, notée $X \mapsto \check{K}_*(X)$ et appelée K-homologie différentielle, dont la partie plate est équivalente à la K-homologie à coefficients dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , $X \mapsto K_*(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, définie récemment par R. Deeley. Plus précisément, pour X une variété différentielle compacte, $\check{K}_*(X)$ est un groupe abélien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \frac{\Omega_{*+1}(X)}{img(R)} & \xrightarrow{a} & \check{K}_*(X) & \xrightarrow{i} & K_*^{geo}(X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow R & & \downarrow Ch_* \\
 0 & \longrightarrow & img(\partial) & \hookrightarrow & \Omega_*^{cl}(X) & \longrightarrow & H_*^{DR}(X) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

La transformation R est le courant fermé caractéristique. Par un léger abus de langage, nous appelons R courbure. La partie plate de $\check{K}_*(X)$, notée $\check{K}_*^f(X)$, est le noyau de la courbure.

Nous explicitons une dualité entre la K-théorie différentielle de Freed-Lott, $\hat{K}_{FL}(X)$, et le groupe $\check{K}_*(X)$, compatible avec la courbure. À l'aide de l'invariant η d'Atiyah-Patodi-Singer, nous construisons des invariants secondaires et un modèle pour $\hat{K}_{FL}(X)$ à travers $\check{K}_{odd}(X)$. Nous définissons le caractère de Chern plat $\check{K}_*^f(X) \rightarrow H_*^{DR}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Q})$, héritant des propriétés de Ch_* via un certain diagramme commutatif. Finalement, nous construisons un modèle pour la K-homologie de X à coefficients dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , $\mathcal{K}_*(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, en adoptant une approche d'Atiyah-Patodi-Singer de la K-théorie à coefficients dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , et nous montrons que les groupes $\mathcal{K}_*(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $\check{K}_{*-1}^f(X)$, $K_*(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

AMS No: 19K33, 19L10, 19L50, 51H25.

Keywords: K-théorie différentielle, K-homologie, K-caractères différentiels, l'invariant η .

Author Address: Département de Mathématiques, faculté des sciences, Kénitra, Maroc.