Sur la structure locale des déformations non commutatives

Mohamed Boucetta
En collaboration avec Zouhair Saassai
m.boucetta@uca.ac.ma

Université Cadi-Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques Marrakech, Maroc

Colloque de mathématique en l'honneur
des mathématiciens marocains
à l'étranger
S.M.M(e,r)
Faculté des sciences Kénitra
20-22 Septembre 2016

Plan

- Origine du problème
- Outils
- Résultat de Hawkins
- Exemple fondamental
- Problème
- Solution

Origine du problème :[Hawkins, J. Diff. Geom. 77 (2007) 385-424]

Soit M une variété et $(\Omega^*(M), \wedge, d)$ l'algèbre graduée différentielle des formes différentielles.

Origine du problème :[Hawkins, J. Diff. Geom. 77 (2007) 385-424]

Soit M une variété et $(\Omega^*(M), \wedge, d)$ l'algèbre graduée différentielle des formes différentielles.Une **déformation** de $\Omega^*(M)$ au sens de Hawkins est une suite exacte d'algèbres différentielles

$$0 \longrightarrow \hbar\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} \Omega^*(M) \longrightarrow 0,$$

où $\hbar$ est un élément central dans $\mathcal{A}$ vérifiant $\hbar x = a$ admet une unique solution.

Origine du problème :[Hawkins, J. Diff. Geom. 77 (2007) 385-424]

Soit M une variété et $(\Omega^*(M), \wedge, d)$ l'algèbre graduée différentielle des formes différentielles.Une **déformation** de $\Omega^*(M)$ au sens de Hawkins est une suite exacte d'algèbres différentielles

$$0 \longrightarrow \hbar\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{P}} \Omega^*(M) \longrightarrow 0,$$

où $\hbar$ est un élément central dans $\mathcal{A}$ vérifiant $\hbar x = a$ admet une unique solution. On considère le crochet

$$\{\mathcal{P}(\alpha), \mathcal{P}(\beta)\} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\imath\hbar}[\alpha, \beta]\right), \quad \alpha, \beta \in \mathcal{A}$$

où $[\alpha, \beta] = \alpha.\beta - (-1)^{\deg\alpha\deg\beta}\beta.\alpha$ est le commutateur gradué dans $\mathcal{A}$.

Il définit sur $\Omega^*(M)$ une structure d'algèbre de Poisson différentielle graduée.

Il définit sur $\Omega^*(M)$ une structure d'algèbre de Poisson différentielle graduée. Ce crochet est entièrement déterminé par

$$\pi(df, dg) := \{f, g\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{df}\alpha := \{f, \alpha\}, \quad f, g \in C^\infty(M),\ \alpha \in \Omega^1(M).$$

Il définit sur $\Omega^*(M)$ une structure d'algèbre de Poisson différentielle graduée. Ce crochet est entièrement déterminé par

$$\pi(df, dg) := \{f, g\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{df}\alpha := \{f, \alpha\}, \quad f, g \in C^\infty(M),\ \alpha \in \Omega^1(M).$$

Ainsi une déformation de $\Omega^*(M)$ définit sur M un tenseur $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ et une application

$$\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M).$$

L'identité de Leibniz entraine que

$$\mathcal{D}_{df}g\alpha = \pi_{\#}(df)(g)\alpha + g\mathcal{D}_{df}\alpha,$$

c'est-à-dire, $\mathcal{D}$ est une **connexion contravariante** associé à π.

L'identité de Leibniz entraine que

$$\mathcal{D}_{df}\, g\alpha = \pi_{\#}(df)(g)\alpha + g\mathcal{D}_{df}\,\alpha,$$

c'est-à-dire, $\mathcal{D}$ est une **connexion contravariante** associé à π.
L'identité de Jacobi graduée de $\{\ ,\ \}$ est équivalente au fait que :

- π est un **tenseur de Poisson**,

L'identité de Leibniz entraine que

$$\mathcal{D}_{df}\, g\alpha = \pi_{\#}(df)(g)\alpha + g\mathcal{D}_{df}\,\alpha,$$

c'est-à-dire, $\mathcal{D}$ est une **connexion contravariante** associé à π.
L'identité de Jacobi graduée de $\{\ ,\ \}$ est équivalente au fait que :

- π est un **tenseur de Poisson**,
- la **courbure** de $\mathcal{D}$ s'annule,

L'identité de Leibniz entraine que

$$\mathcal{D}_{df}g\alpha = \pi_{\#}(df)(g)\alpha + g\mathcal{D}_{df}\alpha,$$

c'est-à-dire, $\mathcal{D}$ est une **connexion contravariante** associé à π.
L'identité de Jacobi graduée de $\{\ ,\ \}$ est équivalente au fait que :

- π est un **tenseur de Poisson**,
- la **courbure** de $\mathcal{D}$ s'annule,
- la **métacourbure** de $\mathcal{D}$ s'annule.

En plus le fait que d est une dérivation de $\{\ ,\ \}$ entraîne que $\mathcal{D}$ est **sans torsion**.

L'identité de Leibniz entraine que

$$\mathcal{D}_{df}\, g\alpha = \pi_{\#}(df)(g)\alpha + g\mathcal{D}_{df}\,\alpha,$$

c'est-à-dire, $\mathcal{D}$ est une **connexion contravariante** associé à π.
L'identité de Jacobi graduée de $\{\ ,\ \}$ est équivalente au fait que :

- π est un **tenseur de Poisson**,
- la **courbure** de $\mathcal{D}$ s'annule,
- la **métacourbure** de $\mathcal{D}$ s'annule.

En plus le fait que d est une dérivation de $\{\ ,\ \}$ entraîne que $\mathcal{D}$ est **sans torsion**.
Le triple $(M, \pi, \mathcal{D})$ est la **géométrie** de la déformation.

Déformation du triple spectrale associé à une variété riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne. Toute déformation du triple spectrale associé à (M, g) induit une déformation de $\Omega^*(M)$ et donc, donne naissance à un tenseur de Poisson π et une connexion contravariante $\mathcal{D}$ vérifiant les conditions ci-dessus.

Déformation du triple spectrale associé à une variété riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne. Toute déformation du triple spectrale associé à (M, g) induit une déformation de $\Omega^*(M)$ et donc, donne naissance à un tenseur de Poisson π et une connexion contravariante $\mathcal{D}$ vérifiant les conditions ci-dessus.
Dans ce cas $\mathcal{D}$ est la **connexion contravariante de Levi-Civita** associée à (π, g).

Déformation du triple spectrale associé à une variété riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne. Toute déformation du triple spectrale associé à (M, g) induit une déformation de $\Omega^*(M)$ et donc, donne naissance à un tenseur de Poisson π et une connexion contravariante $\mathcal{D}$ vérifiant les conditions ci-dessus.
Dans ce cas $\mathcal{D}$ est la **connexion contravariante de Levi-Civita** associée à (π, g).
$(M, g, \pi, \mathcal{D})$ est la géométrie de la déformation du triple spectrale associé à (M, g).

Variétés de Poisson

Définition

Un crochet de Poisson sur une variété M est

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

- $\mathbb{R}$-bilinéaire
- $\{f,g\} = -\{g,f\}$ (antisymétrie)
- $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ (Jacobi)
- $\{f,gh\} = g\{f,h\} + h\{f,g\}$ (Leibniz)

Munie d'un tel crochet, M est dite *variété de Poisson*.

Variétés de Poisson

Définition

Un crochet de Poisson sur une variété M est

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

- $\mathbb{R}$-bilinéaire
- $\{f,g\} = -\{g,f\}$ (antisymétrie)
- $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ (Jacobi)
- $\{f,gh\} = g\{f,h\} + h\{f,g\}$ (Leibniz)

Munie d'un tel crochet, M est dite *variété de Poisson*.

Exemples

- Toute variété symplectique (M, ω) : $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$.
- Le dual d'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ de dimension finie :

$$\{f, g\}(a) := \left[d_a f, d_a g\right] \quad (a \in \mathfrak{g}^*, f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)).$$

Variétés de Poisson

Un crochet de Poisson définit :

- un champ de bivecteurs $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ via : $\pi(df, dg) := \{f, g\}$.
  Jacobi $\Longleftrightarrow [\pi, \pi] = 0$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten-Nijenhuis.
  On dit que π est un *tenseur de Poisson*.

Variétés de Poisson

Un crochet de Poisson définit :

- un champ de bivecteurs $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ via : $\pi(df, dg) := \{f, g\}$.
  Jacobi $\iff [\pi, \pi] = 0$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten-Nijenhuis.
  On dit que π est un *tenseur de Poisson*.

- un morphisme $\pi_\sharp : T^*M \to TM$, $a \mapsto \pi(a, \cdot\,)$, appelé *ancrage*.

Variétés de Poisson

Un crochet de Poisson définit :

- un champ de bivecteurs $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ via : $\pi(df, dg) := \{f, g\}$.
  Jacobi $\Longleftrightarrow [\pi, \pi] = 0$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten-Nijenhuis.
  On dit que π est un *tenseur de Poisson*.

- un morphisme $\pi_\sharp : T^*M \to TM$, $a \mapsto \pi(a, \cdot\,)$, appelé *ancrage*.

- une distribution $\mathcal{C} : x \in M \mapsto \mathrm{Im}\, \pi_\sharp(x)$, dite *caractéristique*.

Variétés de Poisson

Un crochet de Poisson définit :

- un champ de bivecteurs $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ via : $\pi(df, dg) := \{f, g\}$.
  Jacobi $\Longleftrightarrow [\pi, \pi] = 0$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten-Nijenhuis.
  On dit que π est un *tenseur de Poisson*.
- un morphisme $\pi_\sharp : T^*M \to TM$, $a \mapsto \pi(a, \cdot\,)$, appelé *ancrage*.
- une distribution $\mathcal{C} : x \in M \mapsto \mathrm{Im}\,\pi_\sharp(x)$, dite *caractéristique*.
  - La dimension $\rho_\pi(x) := \dim \mathcal{C}_x$ est *le rang* de π en x ;

Variétés de Poisson

Un crochet de Poisson définit :

- un champ de bivecteurs $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ via : $\pi(df, dg) := \{f, g\}$.
  Jacobi $\Longleftrightarrow [\pi, \pi] = 0$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten-Nijenhuis.
  On dit que π est un *tenseur de Poisson*.
- un morphisme $\pi_\sharp : T^*M \to TM$, $a \mapsto \pi(a, \cdot\,)$, appelé *ancrage*.
- une distribution $\mathcal{C} : x \in M \mapsto \mathrm{Im}\,\pi_\sharp(x)$, dite *caractéristique*.
  - La dimension $\rho_\pi(x) := \dim \mathcal{C}_x$ est *le rang* de π en x ;
  - $\mathcal{C}$ est une distribution singulière : $\rho_\pi \neq$ cst ;

Variétés de Poisson

Un crochet de Poisson définit :

- un champ de bivecteurs $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ via : $\pi(df, dg) := \{f, g\}$.
  Jacobi $\Longleftrightarrow [\pi, \pi] = 0$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten-Nijenhuis.
  On dit que π est un *tenseur de Poisson*.
- un morphisme $\pi_\sharp : T^*M \to TM$, $a \mapsto \pi(a, \cdot\,)$, appelé *ancrage*.
- une distribution $\mathcal{C} : x \in M \mapsto \mathrm{Im}\,\pi_\sharp(x)$, dite *caractéristique*.
  - La dimension $\rho_\pi(x) := \dim \mathcal{C}_x$ est *le rang* de π en x ;
  - $\mathcal{C}$ est une distribution singulière : $\rho_\pi \neq$ cst ;
  - L'ouvert $M^{reg} = \{\text{points où } \rho_\pi \text{ est localement constante}\}$ est dense dans M ; un point de M^{reg} est dit *régulier*.

Variétés de Poisson

Un crochet de Poisson définit :

- un champ de bivecteurs $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ via : $\pi(df, dg) := \{f, g\}$.
  Jacobi $\Longleftrightarrow [\pi, \pi] = 0$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten-Nijenhuis.
  On dit que π est un *tenseur de Poisson*.

- un morphisme $\pi_\sharp : T^*M \to TM$, $a \mapsto \pi(a, \cdot\,)$, appelé *ancrage*.

- une distribution $\mathcal{C} : x \in M \mapsto \operatorname{Im} \pi_\sharp(x)$, dite *caractéristique*.
  - La dimension $\rho_\pi(x) := \dim \mathcal{C}_x$ est *le rang* de π en x ;
  - $\mathcal{C}$ est une distribution singulière : $\rho_\pi \neq$ cst ;
  - L'ouvert $M^{reg} = \{\text{points où } \rho_\pi \text{ est localement constante}\}$ est dense dans M ; un point de M^{reg} est dit *régulier*.

- un crochet de Lie sur les 1-formes, dit *de Koszul* :

$$[\alpha, \beta]_\pi := L_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta - L_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha - d\big(\pi(\alpha, \beta)\big).$$

Définitions

Une connexion contravariante sur (M, π) est

$$\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M), \text{ notée } (\alpha, \beta) \mapsto \mathcal{D}_\alpha \beta \,,$$

$\mathbb{R}$-bilinéaire et vérifiant

$$\mathcal{D}_{f\alpha}\beta = f\,\mathcal{D}_\alpha\beta\,, \quad \mathcal{D}_\alpha(f\beta) = f\,\mathcal{D}_\alpha\beta + \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta \quad \big(f \in \mathcal{C}^\infty(M)\big).$$

Connexions contravariantes

Définitions

Une connexion contravariante sur (M, π) est

$$\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M), \ \text{notée } (\alpha, \beta) \mapsto \mathcal{D}_\alpha \beta \,,$$

$\mathbb{R}$-bilinéaire et vérifiant

$$\mathcal{D}_{f\alpha}\beta = f\,\mathcal{D}_\alpha \beta\,, \quad \mathcal{D}_\alpha(f\beta) = f\,\mathcal{D}_\alpha\beta + \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta \quad \big(f \in \mathcal{C}^\infty(M)\big).$$

La torsion et *la courbure* de $\mathcal{D}$ sont définies resp. par :

$$T(\alpha, \beta) := \mathcal{D}_\alpha\beta - \mathcal{D}_\beta\alpha - [\alpha, \beta]_\pi \,,$$

$$R(\alpha, \beta)\gamma := \mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta\gamma - \mathcal{D}_\beta\mathcal{D}_\alpha\gamma - \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma \,.$$

Lorsque $T = 0$ (resp. $R = 0$), $\mathcal{D}$ est dite *sans torsion* (resp. *plate*).

Connexions contravariantes

Exemple fondamental

Étant donné une métrique riemannienne g, $\exists!$ connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur (M, π) telle que $T = 0$ et $\mathcal{D}g = 0$; celle-ci est déterminée par :

$$\langle \mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma \rangle = \frac{1}{2}\Big\{\pi_\sharp(\alpha)\cdot\langle \beta, \gamma \rangle + \pi_\sharp(\beta)\cdot\langle \alpha, \gamma \rangle - \pi_\sharp(\gamma)\cdot\langle \alpha, \beta \rangle$$
$$+ \langle [\alpha, \beta]_\pi, \gamma \rangle - \langle [\beta, \gamma]_\pi, \alpha \rangle + \langle [\gamma, \alpha]_\pi, \beta \rangle\Big\}$$

et s'appelle *connexion de Levi-Civita contravariante* associée à (π, g) (en abrégé : *CLCC*).

Qu'est ce que la métacourbure ?

Crochet de Hawkins

Si $\mathcal{D}$ est une connexion contravariante sans torsion sur (M, π),

$$\exists ! \ \{\cdot,\cdot\} : \Omega^*(M) \times \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

- *bilinéaire,*
- *degré* 0 *:* $\quad \deg\{\sigma,\tau\} = \deg\sigma + \deg\tau\,,$
- *commutatif gradué :* $\quad \{\sigma,\tau\} = -(-1)^{\deg\sigma\deg\tau}\{\tau,\sigma\}\,,$
- *Leibniz :* $\quad \{\sigma,\tau\wedge\rho\} = \{\sigma,\tau\}\wedge\rho + (-1)^{\deg\sigma\deg\tau}\,\tau\wedge\{\sigma,\rho\}\,,$
- *dérivation :* $\quad d\{\sigma,\tau\} = \{d\sigma,\tau\} + (-1)^{\deg\sigma}\,\{\sigma,d\tau\}\,,$
- *Pour toutes* $f, g \in C^\infty(M)$ *et toute* $\alpha \in \Omega^1(M)$,

$$\{f,g\} = \pi(df,dg), \quad \{f,\alpha\} = \mathcal{D}_{df}\,\alpha\,.$$

Qu'est ce que la métacourbure ?

Identité de Jacobi et métacourbure

Qu'en est-il maintenant de l'identité de Jocobi,

$$\{\sigma, \{\tau, \rho\}\} - \{\{\sigma, \tau\}, \rho\} - (-1)^{\deg\sigma \deg\tau}\{\tau, \{\sigma, \rho\}\} = 0 \text{ ?}$$

Qu'est ce que la métacourbure ?

Identité de Jacobi et métacourbure

Qu'en est-il maintenant de l'identité de Jocobi,

$$\mathcal{J}(\sigma,\tau,\rho) := \{\sigma,\{\tau,\rho\}\} - \{\{\sigma,\tau\},\rho\} - (-1)^{\deg\sigma\deg\tau}\{\tau,\{\sigma,\rho\}\} = 0 \ ?$$

Qu'est ce que la métacourbure ?

Identité de Jacobi et métacourbure

Qu'en est-il maintenant de l'identité de Jocobi,

$$\mathcal{J}(\sigma,\tau,\rho) := \{\sigma,\{\tau,\rho\}\} - \{\{\sigma,\tau\},\rho\} - (-1)^{\deg\sigma\deg\tau}\{\tau,\{\sigma,\rho\}\} = 0 \ ?$$

En petits degrés, on a :

- $\mathcal{J}(f,g,h) = 0$ car π est de Poisson.
- $\mathcal{J}(f,g,\alpha) = \mathcal{D}_{df}\mathcal{D}_{dg}\alpha - \mathcal{D}_{d\{f,g\}}\alpha - \mathcal{D}_{dg}\mathcal{D}_{df}\alpha = R(df,dg)\alpha$.
- Si $\mathcal{D}$ est plate alors la formule

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(df,\alpha,\beta) :=& \mathcal{J}(f,\alpha,\beta)\\ =& \{f,\{\alpha,\beta\}\} - \{\{f,\alpha\},\beta\} - \{\{f,\beta\},\alpha\}\end{aligned}$$

  définit un tenseur $\mathcal{M}$ de type $(2,3)$.

Proposition

$\mathcal{J} = 0$ si et seulement si $\mathcal{D}$ est plate et $\mathcal{M} = 0$.

Proposition

$\mathcal{J} = 0$ si et seulement si $\mathcal{D}$ est plate et $\mathcal{M} = 0$.

Le tenseur $\mathcal{M}$ est la *métacourbure* de $\mathcal{D}$.

Proposition

$\mathcal{J} = 0$ si et seulement si $\mathcal{D}$ est plate et $\mathcal{M} = 0$.

Le tenseur $\mathcal{M}$ est la *métacourbure* de $\mathcal{D}$.
C'est une application $C^\infty(M)$-trilinéaire symétrique

$$\mathcal{M} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^2(M).$$

Proposition

$\mathcal{J} = 0$ si et seulement si $\mathcal{D}$ est plate et $\mathcal{M} = 0$.

Le tenseur $\mathcal{M}$ est la *métacourbure* de $\mathcal{D}$.
C'est une application $C^\infty(M)$-trilinéaire symétrique

$$\mathcal{M} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^2(M).$$

Ou bien on peut regarder $\mathcal{M}$ comme un élément de $\Gamma(S^3TM \otimes \wedge^2 T^*M)$.

Calcul du corchet de Hawkins et de la métacourbure

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une connexion sans torsion ni courbure. Le crochet de Hawkins en petits degré est donné par

$$\{f, g\} = \pi(df, dg), \quad \{f, \alpha\} = \mathcal{D}_{df}\alpha,\ f, g \in C^\infty(M),\ \alpha \in \Omega^1(M).$$

Calcul du corchet de Hawkins et de la métacourbure

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une connexion sans torsion ni courbure. Le crochet de Hawkins en petits degré est donné par

$$\{f, g\} = \pi(df, dg), \quad \{f, \alpha\} = \mathcal{D}_{df}\alpha,\ f, g \in C^\infty(M),\ \alpha \in \Omega^1(M).$$

On peut montrer que

$$\{\alpha, \beta\} = -\mathcal{D}_\alpha d\beta - \mathcal{D}_\beta d\alpha + d\mathcal{D}_\alpha \beta + [\alpha, d\beta]_\pi,\ \alpha, \beta \in \Omega^1(M).$$

Calcul du corchet de Hawkins et de la métacourbure

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété munie d'un tenseur de Poisson et d'une connexion sans torsion ni courbure. Le crochet de Hawkins en petits degré est donné par

$$\{f, g\} = \pi(df, dg), \quad \{f, \alpha\} = \mathcal{D}_{df}\alpha,\ f, g \in C^\infty(M),\ \alpha \in \Omega^1(M).$$

On peut montrer que

$$\{\alpha, \beta\} = -\mathcal{D}_\alpha d\beta - \mathcal{D}_\beta d\alpha + d\mathcal{D}_\alpha\beta + [\alpha, d\beta]_\pi,\ \alpha, \beta \in \Omega^1(M).$$

La métacourbure est donnée par

$$\mathcal{M}(df, \alpha, \beta) = \{f, \{\alpha, \beta\}\} - \{\{f, \alpha\}, \beta\} - \{\alpha, \{f, \beta\}\},\ f \in C^\infty(M),\ \alpha, \beta \in \Omega^1(M).$$

Remarque importante

Si α est parallèle, i.e., $\mathcal{D}\alpha = 0$, pour tout $\beta \in \Omega^1(M)$,

$$\{\alpha, \beta\} = -\mathcal{D}_\beta d\alpha. \tag{1}$$

Remarque importante

Si α est parallèle, i.e., $\mathcal{D}\alpha = 0$, pour tout $\beta \in \Omega^1(M)$,

$$\{\alpha, \beta\} = -\mathcal{D}_\beta d\alpha. \tag{1}$$

Si α et β sont parallèles, pour tout $\gamma \in \Omega^1(M)$,

$$\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma) = -\mathcal{D}_\gamma \mathcal{D}_\beta d\alpha. \tag{2}$$

Retour au problème du départ

En effet, si (M, g) est une variété riemannienne,

$$\Big[\text{Une déformation du triple spectrale de } (M, g)\,\Big]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \exists \text{ un tenseur de Poisson } \pi \text{ sur } M \text{ tel que :} \\ \qquad (H_1)\ \text{La CLCC } \mathcal{D} \text{ associée à } (\pi, g) \text{ est plate} \\ \qquad (H_2)\ \text{La métacourbure de } \mathcal{D} \text{ est nulle} \\ \qquad (H_3)\ d(i_\pi \mu) = 0, \text{ où } \mu \text{ est le volume riemannien} \end{array}\right]$$

Résultat principal de Hawkins

Théorème 1 [Hawkins, J. Diff. Geom. 77 (2007) 385-424]

Soit (M, π) une variété de Poisson munie d'une métrique riemannienne g. On suppose que M est compacte et vérifie (H_1), (H_2) et (H_3). Alors, autour de tout $x \in M^{reg}$,

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \, X_i \wedge X_j$$

où (a_{ij}) est constante et inversible et $X_1, \ldots, X_{2r}$ sont des champs de Killing linéairement indépendants qui commutent 2 à 2.

Au vu de ce théorème, il est naturel de chercher des exemples :

Au vu de ce théorème, il est naturel de chercher des exemples :

- de variétés de Poisson (M, π) muni d'une connexion contravariante $\mathcal{D}$ telle que la torsion, la courbure et la métacourbure de $\mathcal{D}$ s'annulent.

Au vu de ce théorème, il est naturel de chercher des exemples :

- de variétés de Poisson (M, π) muni d'une connexion contravariante $\mathcal{D}$ telle que la torsion, la courbure et la métacourbure de $\mathcal{D}$ s'annulent.
- de variétés (M, g, π) muni d'une métrique riemannienne et d'un tenseur de Poisson telle que la connexion de Levi-Civita contravariante associée à (π, g) n'a ni courbure ni métacourbure.

Exemple fondamental

Soient

- $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^1(M)$ une action d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de dimension finie, sur une variété M.
- $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ une solution de l'équation de Yang-Baxter classique.

Considérons

$$\pi^r := \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\zeta(u_i) \wedge \zeta(u_j)$$

et $\mathcal{D}^r : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$,

$$(\alpha, \beta) \mapsto \mathcal{D}^r_\alpha \beta := \sum_{i,j} a_{ij}\alpha(\zeta(u_i))\mathcal{L}_{\zeta(u_j)}\beta$$

où a_{ij} sont les composantes de r dans une base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathfrak{g}$.

Exemple fondamental

Théorème 2 [Boucetta, Lett. Math. Phys. 83 (2008) 69-81]

(a) π^r et $\mathcal{D}^r$ dépendent uniquement de r et ζ et définissent, respectivement, un tenseur de Poisson et une connexion contravariante sans torsion ni courbure sur M.

(b) Si g est une métrique riemannienne sur M et ζ préserve g, i.e., pour tout $u \in \mathfrak{g}$, $\zeta(u)$ est de Killing, alors $\mathcal{D}^r$ est la CLCC de (π^r, g).

(c) Si ζ est **libre**, i.e., pour tout $x \in M$, l'application $v \mapsto \zeta(v)(x)$ est injective, la métacourbure de $\mathcal{D}^r$ est nulle.

Exemple fondamental

Théorème 2 [Boucetta, Lett. Math. Phys. 83 (2008) 69-81]

(a) π^r et $\mathcal{D}^r$ dépendent uniquement de r et ζ et définissent, respectivement, un tenseur de Poisson et une connexion contravariante sans torsion ni courbure sur M.

(b) Si g est une métrique riemannienne sur M et ζ préserve g, i.e., pour tout $u \in \mathfrak{g}$, $\zeta(u)$ est de Killing, alors $\mathcal{D}^r$ est la CLCC de (π^r, g).

(c) Si ζ est **libre**, i.e., pour tout $x \in M$, l'application $v \mapsto \zeta(v)(x)$ est injective, la métacourbure de $\mathcal{D}^r$ est nulle.

Remarque. Dans (c), on ne peut pas enlever l'hypothèse que l'action est libre.

D'où le problème ?

Étant donné une variété de Poisson (M, π) munie d'une connexion contravariante dont la torsion, la courbure et la métacourbure s'annulent, pour tout point régulier existe-t-il un voisinage U, une action libre d'une algèbre de Lie de dimension finie $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(U)$, et une solution $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ de l'EYBC telles que $\pi_{|U} = \pi^r$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$?

D'où le problème ?

Étant donné une variété de Poisson (M, π) munie d'une connexion contravariante dont la torsion, la courbure et la métacourbure s'annulent, pour tout point régulier existe-t-il un voisinage U, une action libre d'une algèbre de Lie de dimension finie $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(U)$, et une solution $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ de l'EYBC telles que $\pi_{|U} = \pi^r$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$? En plus si $\mathcal{D}$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à (M, g), l'action ζ peut-elle être choisie de telle sorte qu'elle préserve g ?

Remarques importantes

En étudiant ce problème, on a fait les remarques importantes suivantes :

Remarques importantes

En étudiant ce problème, on a fait les remarques importantes suivantes :

- Le théorème de Hawkins donne une réponse positive à cette question dans le cas d'une variété riemannienne compacte et avec une hypothèse supplémentaire.

Remarques importantes

En étudiant ce problème, on a fait les remarques importantes suivantes :

- Le théorème de Hawkins donne une réponse positive à cette question dans le cas d'une variété riemannienne compacte et avec une hypothèse supplémentaire.
- Comme conséquence du théorème de Hawkins, $\mathcal{D}\pi = 0$ et donc $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, i.e., vérifie la propriété

$$\big(\,\forall\, x \in M^{reg}, \forall\, a \in T_x^*M\,\big), \;\; \pi_\sharp(a) = 0 \implies \mathcal{D}_a = 0. \tag{3}$$

Remarques importantes

En étudiant ce problème, on a fait les remarques importantes suivantes :

- Le théorème de Hawkins donne une réponse positive à cette question dans le cas d'une variété riemannienne compacte et avec une hypothèse supplémentaire.
- Comme conséquence du théorème de Hawkins, $\mathcal{D}\pi = 0$ et donc $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, i.e., vérifie la propriété

$$\big(\,\forall\, x \in M^{reg}, \forall\, a \in T_x^* M\,\big), \;\; \pi_\sharp(a) = 0 \implies \mathcal{D}_a = 0. \tag{3}$$

- Dans l'exemple fondamental si l'action ζ est libre, $\mathcal{D}^r$ vérifie la propriété (3).

Remarques importantes

En étudiant ce problème, on a fait les remarques importantes suivantes :

- Le théorème de Hawkins donne une réponse positive à cette question dans le cas d'une variété riemannienne compacte et avec une hypothèse supplémentaire.
- Comme conséquence du théorème de Hawkins, $\mathcal{D}\pi = 0$ et donc $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, i.e., vérifie la propriété

$$\left(\forall\, x \in M^{reg}, \forall\, a \in T_x^*M\,\right),\ \ \pi_\sharp(a) = 0 \implies \mathcal{D}_a = 0. \tag{3}$$

- Dans l'exemple fondamental si l'action ζ est libre, $\mathcal{D}^r$ vérifie la propriété (3).
- Si $(M, \pi, \mathcal{D})$ est une variété de Poisson munie d'une connexion sans courbure ni torsion vérifiant (3), Il existe sur M^{reg} un tenseur $\mathbf{T}$ de type $(2, 2)$ vérifiant $\mathcal{D}\mathbf{T} = \mathcal{M}$.

Remarques importantes

En étudiant ce problème, on a fait les remarques importantes suivantes :

- Le théorème de Hawkins donne une réponse positive à cette question dans le cas d'une variété riemannienne compacte et avec une hypothèse supplémentaire.
- Comme conséquence du théorème de Hawkins, $\mathcal{D}\pi = 0$ et donc $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, i.e., vérifie la propriété

$$\left(\forall\, x \in M^{reg}, \forall\, a \in T_x^*M\right),\ \ \pi_\sharp(a) = 0 \implies \mathcal{D}_a = 0. \qquad (3)$$

- Dans l'exemple fondamental si l'action ζ est libre, $\mathcal{D}^r$ vérifie la propriété (3).
- Si $(M, \pi, \mathcal{D})$ est une variété de Poisson munie d'une connexion sans courbure ni torsion vérifiant (3), Il existe sur M^{reg} un tenseur $\mathbf{T}$ de type $(2, 2)$ vérifiant $\mathcal{D}\mathbf{T} = \mathcal{M}$.
- Dans l'exemple fondamental, si l'action est libre c'est $\mathbf{T}$ qui s'annule entraînant la nullité de la métacourbure.

D'où le problème reformulé :

Étant donné une variété de Poisson (M, π) munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion contravariante dont la torsion, la courbure et le tenseur $\mathbf{T}$ s'annulent, pour tout point régulier existe-t-il un voisinage U, une action libre d'une algèbre de Lie de dimension finie $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$, et une solution $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ de l'EYBC telles que $\pi = \pi^r$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$?

D'où le problème reformulé :

Étant donné une variété de Poisson (M, π) munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion contravariante dont la torsion, la courbure et le tenseur $\mathbf{T}$ s'annulent, pour tout point régulier existe-t-il un voisinage U, une action libre d'une algèbre de Lie de dimension finie $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$, et une solution $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ de l'EYBC telles que $\pi = \pi^r$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$?
En plus si $\mathcal{D}$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à (M, g), l'action ζ peut-elle être choisie de telle sorte qu'elle préserve g ?

Solution : Résultat principal

Théorème 3 [Boucetta & Saassai, J. Geom. Phys. 82 (2014) 64-74]

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une connexion contravariante sans torsion ni courbure.

- Si $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et $\mathbf{T} = 0$, alors pour tout $x_0 \in M^{reg}$ de rang $2r$, $\exists$ une action libre $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(U)$ d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension $2r$ sur un voisinage ouvert U de x_0 et une solution inversible de l'EYBC $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ telles que $\pi = \pi^r$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$.
- Si de plus $\mathcal{D}$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à π et une métrique riemannienne g, alors ζ peut être choisie de façon qu'elle préserve g.

Solution : Construction d'un co-repère plat

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion sans torsion et plate et soit $x_0 \in M^{reg}$ fixé et $(a_1, \ldots, a_{2r})$ une famille de covecteur dans $T^*_{x_0}M$ telle que $(\pi_\#(a_1), \ldots, \pi_\#(a_{2r}))$ soit une base de $\mathrm{Im}\pi_\#(x_0)$. .

Solution : Construction d'un co-repère plat

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion sans torsion et plate et soit $x_0 \in M^{reg}$ fixé et $(a_1, \ldots, a_{2r})$ une famille de covecteur dans $T^*_{x_0}M$ telle que $(\pi_\#(a_1), \ldots, \pi_\#(a_{2r}))$ soit une base de $\mathrm{Im}\pi_\#(x_0)$. .

- Pour tout $a \in T^*_{x_0}M$, il existe un ouvert $U \ni x_0$ et $\beta^a \in \Omega^1(U)$ tel que $\beta^a(x_0) = a$ et $\mathcal{D}\beta^a = 0$.

Solution : Construction d'un co-repère plat

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion sans torsion et plate et soit $x_0 \in M^{reg}$ fixé et $(a_1, \ldots, a_{2r})$ une famille de covecteur dans $T^*_{x_0}M$ telle que $(\pi_\#(a_1), \ldots, \pi_\#(a_{2r}))$ soit une base de $\mathrm{Im}\pi_\#(x_0)$. .

- Pour tout $a \in T^*_{x_0}M$, il existe un ouvert $U \ni x_0$ et $\beta^a \in \Omega^1(U)$ tel que $\beta^a(x_0) = a$ et $\mathcal{D}\beta^a = 0$.
- Notons $\phi_i = \beta^{a_i}$. Les champs de vecteurs $(\pi_\#(\phi_1), \ldots, \pi_\#(\phi_{2r}))$ sont linéairement indépendants et commutent deux à deux et donc il existe un système de coordonnées $\left((x^i)_{i=1}^{2r}, (y^j)_{j=1}^{d-2r}\right)$ tel que $\pi_\#(\phi_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, 2r$.

Solution : Construction d'un co-repère plat

Soit $(M,\pi,\mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion sans torsion et plate et soit $x_0 \in M^{reg}$ fixé et $(a_1,\ldots,a_{2r})$ une famille de covecteur dans $T^*_{x_0}M$ telle que $(\pi_\#(a_1),\ldots,\pi_\#(a_{2r}))$ soit une base de $\mathrm{Im}\pi_\#(x_0)$. .

- Pour tout $a \in T^*_{x_0}M$, il existe un ouvert $U \ni x_0$ et $\beta^a \in \Omega^1(U)$ tel que $\beta^a(x_0) = a$ et $\mathcal{D}\beta^a = 0$.
- Notons $\phi_i = \beta^{a_i}$. Les champs de vecteurs $(\pi_\#(\phi_1),\ldots,\pi_\#(\phi_{2r}))$ sont linéairement indépendants et commutent deux à deux et donc il existe un système de coordonnées $\left((x^i)_{i=1}^{2r},(y^j)_{j=1}^{d-2r}\right)$ tel que $\pi_\#(\phi_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1,\ldots,2r$. On a $\pi_\#(dy^i) = 0$, $i = 1,\ldots,d-2r$.

Solution : Construction d'un co-repère plat

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion sans torsion et plate et soit $x_0 \in M^{reg}$ fixé et $(a_1, \ldots, a_{2r})$ une famille de covecteur dans $T^*_{x_0}M$ telle que $(\pi_\#(a_1), \ldots, \pi_\#(a_{2r}))$ soit une base de $\mathrm{Im}\pi_\#(x_0)$. .

- Pour tout $a \in T^*_{x_0}M$, il existe un ouvert $U \ni x_0$ et $\beta^a \in \Omega^1(U)$ tel que $\beta^a(x_0) = a$ et $\mathcal{D}\beta^a = 0$.
- Notons $\phi_i = \beta^{a_i}$. Les champs de vecteurs $(\pi_\#(\phi_1), \ldots, \pi_\#(\phi_{2r}))$ sont linéairement indépendants et commutent deux à deux et donc il existe un système de coordonnées $\left((x^i)_{i=1}^{2r}, (y^j)_{j=1}^{d-2r}\right)$ tel que $\pi_\#(\phi_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, 2r$. On a $\pi_\#(dy^i) = 0$, $i = 1, \ldots, d-2r$.
- Pour tout $x \in U$, posons $\mathcal{H}_x = \mathrm{vect}\{\phi_1(x), \ldots, \phi_{2r}(x)\}$. On a $T^*_U M = \ker \pi_\# \oplus \mathcal{H}$ et $\mathcal{D}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.

Solution : Construction d'un co-repère plat

Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion sans torsion et plate et soit $x_0 \in M^{reg}$ fixé et $(a_1, \ldots, a_{2r})$ une famille de covecteur dans $T^*_{x_0}M$ telle que $(\pi_\#(a_1), \ldots, \pi_\#(a_{2r}))$ soit une base de $\mathrm{Im}\pi_\#(x_0)$. .

- Pour tout $a \in T^*_{x_0}M$, il existe un ouvert $U \ni x_0$ et $\beta^a \in \Omega^1(U)$ tel que $\beta^a(x_0) = a$ et $\mathcal{D}\beta^a = 0$.
- Notons $\phi_i = \beta^{a_i}$. Les champs de vecteurs $(\pi_\#(\phi_1), \ldots, \pi_\#(\phi_{2r}))$ sont linéairement indépendants et commutent deux à deux et donc il existe un système de coordonnées $\left((x^i)_{i=1}^{2r}, (y^j)_{j=1}^{d-2r}\right)$ tel que $\pi_\#(\phi_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, 2r$. On a $\pi_\#(dy^i) = 0$, $i = 1, \ldots, d - 2r$.
- Pour tout $x \in U$, posons $\mathcal{H}_x = \mathrm{vect}\{\phi_1(x), \ldots, \phi_{2r}(x)\}$. On a $T^*_U M = \ker \pi_\# \oplus \mathcal{H}$ et $\mathcal{D}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.
- $\mathbf{F}^* = \left\{\phi_1, \ldots, \phi_{2r}, dy^1, \ldots, dy^{d-2r}\right\}$ est un co-repère plat.

Solution : Calcul du repère dual de $\mathbf{F}^*$

Pour chaque $i = 1, \ldots, 2r$, il existe des fonctions uniques $A_i^1, \ldots, A_i^s$ telles que $dx^i + \sum_u A_i^u \, dy_u \in \mathcal{H}$. Considérons

$$X^i := -X_{x^i} = -\pi_\sharp(dx^i)\,, \qquad Y_u := \frac{\partial}{\partial y_u} - \sum_{i=1}^{2r} A_i^u \, \frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

Solution : Calcul du repère dual de $\mathbf{F}^*$

Pour chaque $i = 1, \ldots, 2r$, il existe des fonctions uniques $A_i^1, \ldots, A_i^s$ telles que $dx^i + \sum_u A_i^u \, dy_u \in \mathcal{H}$. Considérons

$$X^i := -X_{x^i} = -\pi_\sharp(dx^i)\,, \qquad Y_u := \frac{\partial}{\partial y_u} - \sum_{i=1}^{2r} A_i^u \, \frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

Lemme 3

$\{X_i, Y_u\}$ est le repère dual de $\mathbf{F}^*$. De plus, les champs de vecteurs X_i et Y_u sont, respectivement, hamiltoniens et de Poisson, et vérifient :

$$[X_i, X_j] = -\sum_{k=1}^{2r} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k} X_k\,; \quad [X_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \frac{\partial A_i^u}{\partial x_j} X_j\,;$$

$$[Y_u, Y_v] = \sum_{i,j=1}^{2r} \pi^{ij} \left(\frac{\partial A_j^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_j^v}{\partial y_u} + \sum_{k=1}^{2r} A_k^u \frac{\partial A_j^v}{\partial x_k} - A_k^v \frac{\partial A_j^u}{\partial x_k} \right) X_i\,.$$

avec $(\pi_{ij}) = (\pi(dx^i, dx^j))$ et (π^{ij}) est l'inverse de la matrice (π_{ij}).

Solution : Calcul des tenseurs $\mathcal{M}$ et T

Théorème 4

- Pour tout u, $\mathcal{M}(dy_u, \cdot, \cdot) = 0$.
- Pour tous i, j, k,

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j, \phi_k) = -\sum_{l<m} \frac{\partial^3 \pi_{lm}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \phi_l \wedge \phi_m + \sum_{l,u} \frac{\partial^3 A_l^u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \phi_l \wedge dy_u$$

$$+ \sum_{u<v,\, l} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\pi^{kl} \left(\frac{\partial A_l^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_l^v}{\partial y_u} + \sum_m A_m^u \frac{\partial A_l^v}{\partial x_m} - A_m^v \frac{\partial A_l^u}{\partial x_m} \right) \right) dy_u \wedge dy_v.$$

Solution : Calcul des tenseurs $\mathcal{M}$ et $\mathbf{T}$

Théorème 4

- Pour tout u, $\mathcal{M}(dy_u, \cdot, \cdot) = 0$.
- Pour tous i, j, k,

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j, \phi_k) = -\sum_{l<m} \frac{\partial^3 \pi_{lm}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \phi_l \wedge \phi_m + \sum_{l,u} \frac{\partial^3 A_l^u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \phi_l \wedge dy_u$$
$$+\sum_{u<v,\, l} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\pi^{kl}\left(\frac{\partial A_l^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_l^v}{\partial y_u} + \sum_m A_m^u \frac{\partial A_l^v}{\partial x_m} - A_m^v \frac{\partial A_l^u}{\partial x_m}\right)\right) dy_u \wedge dy_v.$$

Théorème 5

- Pour tout u, $\mathbf{T}(dy_u, \cdot) = 0$.
- Pour tous i, j,

$$\mathbf{T}(\phi_i, \phi_j) = -\sum_{k<l} \frac{\partial^2 \pi_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} \phi_k \wedge \phi_l + \sum_{k,u} \frac{\partial^2 A_k^u}{\partial x_i \partial x_j} \phi_k \wedge dy_u$$
$$+\sum_{u<v,\, k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\pi^{jk}\left(\frac{\partial A_k^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_k^v}{\partial y_u} + \sum_l A_l^u \frac{\partial A_k^v}{\partial x_l} - A_l^v \frac{\partial A_k^u}{\partial x_l}\right)\right) dy_u \wedge dy_v.$$

Solution : Preuve du théorème 3

Idée de la preuve

L'idée est de construire autour de x_0 des champs de vecteurs libres $Z_1, \dots, Z_{2r} \in \Gamma(\mathcal{C})$ qui commutent avec les champs de vecteurs X_i et Y_u du repère dual du corepère $\mathbf{F}^*$. Dans ce cas,

- $[Z_i, Z_j] = \sum_k c_{ij}^k Z_k$ avec $c_{ij}^k = cst$ donc $Z_1, \dots, Z_{2r}$ forment une algèbre de Lie de dimension $2r$ qui agit librement sur un voisinage de x_0.
- $\pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}\, Z_i \wedge Z_j$ où la matrice (a_{ij}) est constante et inversible.
- $\mathcal{D}_\alpha \beta = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha(Z_i)\, \mathcal{L}_{Z_j} \beta$; en effet, ceci est vrai pour $\beta = \phi_i$ ou dy_u puisque $\mathcal{L}_{Z_i} \phi_j = \mathcal{L}_{Z_i} dy_u = 0$. Et $\mathcal{D}_\alpha \beta - \sum_{i,j} a_{ij} \alpha(Z_i)\, \mathcal{L}_{Z_j} \beta$ est tensoriel en β.

Solution : Preuve du théorème 3

On procède en deux étapes :

Première étape

On construit d'abord des champs de vecteurs libres $T_1, \ldots, T_{2r} \in \Gamma(\mathcal{C})$ qui commutent avec les champs de vecteurs X_i. Pour cela, la nullité de $\mathbf{T}$ et le lemme 3, on a :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{2r} \lambda_{ij}^k \, X_k \,, \quad [X_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \mu_{iu}^j \, X_j \,, \quad [Y_u, Y_v] = \sum_{i=1}^{2r} \nu_{uv}^i \, X_i$$

avec λ_{ij}^k, μ_{iu}^j, ν_{uv}^i de Casimir, i.e., qui ne dépendent que des y^i.

Solution : Preuve du théorème 3

On procède en deux étapes :

Première étape

On construit d'abord des champs de vecteurs libres $T_1, \ldots, T_{2r} \in \Gamma(\mathcal{C})$ qui commutent avec les champs de vecteurs X_i. Pour cela, la nullité de $\mathbf{T}$ et le lemme 3, on a :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{2r} \lambda_{ij}^k X_k \,, \quad [X_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \mu_{iu}^j X_j \,, \quad [Y_u, Y_v] = \sum_{i=1}^{2r} \nu_{uv}^i X_i$$

avec λ_{ij}^k, μ_{iu}^j, ν_{uv}^i de Casimir, i.e., qui ne dépendent que des y^i.

On choisit une transversale $\mathcal{T}$ au feuilletage symplectique $\mathcal{S}$ passant par x_0. Pour $y \in \mathcal{T}$ fixé, $X_{1|_{\mathcal{S}_y}}, \ldots, X_{2r|_{\mathcal{S}_y}}$ forment une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_y$ qui agit librement et transitivement sur $\mathcal{S}_y$, donc $\exists$ un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie $\Gamma_y : \mathfrak{g}_y \to \mathfrak{X}^1(\mathcal{S}_y)$, qui est libre, transitive et tel que

$$\Gamma_y(X_{i|_{\mathcal{S}_y}})(y) = X_i(y) \,, \quad [\Gamma_y(X_{i|_{\mathcal{S}_y}}), X_{j|_{\mathcal{S}_y}}] = 0 \;\; \forall i, j.$$

On prend $T_i(z) := \Gamma_y(X_i^y)(z), \; z \in \mathcal{S}_y$ et on fait varier y pour obtenir T_i.

Solution : Preuve du théorème 3

Maintenant, comme les μ_{iu}^{j} sont de Casimir

$$[T_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \gamma_{iu}^{j}\, T_j$$

avec γ_{iu}^{j} de Casimir et vérifiant

$$\frac{\partial \gamma_{ju}^{i}}{\partial y_v} - \frac{\partial \gamma_{jv}^{i}}{\partial y_u} + \sum_{k=1}^{2r} \gamma_{ku}^{i}\gamma_{jv}^{k} - \gamma_{kv}^{i}\gamma_{ju}^{k} = 0 \qquad (*)$$

car les ν_{uv}^{i} sont de Casimir et $[T_i, [Y_u, Y_v]] = 0$ pour tout i, u, v.

Solution : Preuve du théorème 3

Maintenant, comme les μ_{iu}^{j} sont de Casimir

$$[T_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \gamma_{iu}^{j}\, T_j$$

avec γ_{iu}^{j} de Casimir et vérifiant

$$\frac{\partial \gamma_{ju}^{i}}{\partial y_v} - \frac{\partial \gamma_{jv}^{i}}{\partial y_u} + \sum_{k=1}^{2r} \gamma_{ku}^{i}\gamma_{jv}^{k} - \gamma_{kv}^{i}\gamma_{ju}^{k} = 0 \qquad (*)$$

car les ν_{uv}^{i} sont de Casimir et $[T_i, [Y_u, Y_v]] = 0$ pour tout i, u, v.

Deuxième étape

On cherche Z_i de la forme :

$$Z_i := \sum_{j=1}^{2r} \xi_{ji}\, T_j$$

où ξ_{ij} sont de Casimir et $\xi = (\xi_{ij})$ est inversible. Ceux-ci existent par $(*)$.

MERCI DE VOTRE ATTENTION