Unités de Stark et Théorie d'Iwasawa

Hassan Oukhaba

Université de Franche-Comté
Besançon
France

KÉNITRA
Septembre 2016

Les premiers exemples de fonctions L apparaissent au $19^{ième}$ siècle, avec la fonction Zêta de Riemann (1859)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad Re(s) > 1$$

et les fonctions L de Dirichlet (1836)

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad Re(s) > 1,$$

où χ est un caractère multiplicatif, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes

$$\chi : (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Le développement de l'analyse complexe et de la théorie des nombres au $20^{ième}$ siècle a permis de considérer des fonctions L plus générales comme la fonction Zêta de Dedekind d'un corps de nombres K

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \quad Re(s) > 1,$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt tous les idéaux entiers de K et $N(\mathfrak{a}) = \#\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$.

On peut pousser la généralisation encore plus loin en considérant les fonctions L d'Artin du corps de nombres K

$$L_K(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \quad Re(s) > 1,$$

χ un caractère multiplicatif complexe sur les idéaux de K.

I) $L_K(s,\chi)$ possède un prolongement analytique en une fonction méromorphe dans tous le plan complexe.

II) Si $\chi \neq 1$ alors le prolongement de $L_K(s,\chi)$ est analytique.

III) Si $\chi = 1$ alors le prolongement de $L_K(s,\chi)$ possède un pôle simple en $s = 1$.

IV) $L_K(s,\chi)$ possède une équation fonctionnelle

$$L_K(1-s,\chi) \sim L_K(s,\bar{\chi})$$

V) $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \dfrac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R_K}{w_K\sqrt{D_K}}h(K)$

VI) Formule analytique pour le nombre de classes

$$\zeta_K(s) = \zeta_k(s) \prod_{\chi} L_k(s, \chi).$$

VII) Supposons que l'homomorphisme $\chi : (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ vérifie

$$\chi(-1) = 1,$$

alors $L(0, \chi) = 0$ et

$$L'(0, \chi) = \frac{-1}{2} \sum_{(k,d)=1} \chi(k) \log |(1 - e^{\frac{2ik\pi}{d}})|.$$

Ces conjectures sont formulées par Harold Mead Stark dans une série d'articles durant les années 70. Leur but est d'exprimer le premier coefficient non nul dans le développement de Taylor des séries L_K en $s = 0$. Ici nous sommes concernés par les séries L_K telles que

$$L_K(0, \chi) = 0 \quad et \quad L'_K(0, \chi) \neq 0.$$

Hypothèses

H1) F/K une extension abélienne de corps de nombres.

H2) $\chi : Gal(F/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère non trivial.

H3) Hypothèses sur les places infinies.

Dans ce cas Stark conjecture l'existence de $\varepsilon_{F/K} \in F^\times$ tel que

$$L'_K(0,\chi) = \frac{-1}{w_F} \sum_{\sigma \in Gal(F/K)} \chi(\sigma) \log |(\sigma(\varepsilon_{F/K}))|,$$

où w_F est le nombre de racines de 1 dans F.

Le but de Kenkichi Iwasawa (1917-1998) est d'étudier les corps de nombres non pas de manière individuelle mais plutôt en famille. On se donne un nombre premier p, et une suite de corps de nombres

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset F_{n+1} \subset \cdots F_\infty = \cup_n F_n,$$

telle que

$$Gal(F_n/F_0) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas le groupe de Galois de F_∞/F_0 est isomorphe au pro-p-complété de $\mathbb{Z}$, noté $\mathbb{Z}_p$. Comme exemple on peut prendre les corps

$$F_n = \mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{p^{n+1}}})$$

Faisons les hypothèses suivantes :
I) Supposons que les corps $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset F_{n+1} \subset \cdots$ sont tous abéliens sur un corps de nombres K.
II) Supposons que les conjectures de Stark sont vraies pour suffisamment de corps intermédiaires entre F_∞ et K

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
F_\infty \arrow[d, dash] & \\
F_n \arrow[d, dash] & \\
F_0 \arrow[dr, dash] & \\
& K
\end{tikzcd}$$

Definition 1

On note St_n le sous-module galoisien de $\mathcal{O}_{F_n}^{\times}$ engendré par “les racines” des unités de Stark des extensions intermédiares entre F_n et K

Definition 2

On note $\widehat{St}_n$ le pro-p-complété de St_n

Definition 3

On note $\widehat{St}_\infty$ la limite projective pour les normes de $\widehat{St}_n$,

$$\widehat{St}_\infty = \varprojlim_n \widehat{St}_n.$$

PROBLÈME I : Étudier la structure de $\widehat{St}_\infty$ comme module sur la $\mathbb{Z}_p$-algèbre

$$\Lambda = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[Gal(F_n/K)].$$

Theorem 4

(J. Assim et H. Oukhaba 2011)
Il existe un morphisme de Λ-modules

$$\rho : \widehat{St}_\infty \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes \Lambda,$$

tel que
1) $\ker(\rho)$ est égal à la torsion de $\widehat{St}_\infty$.
2) $Im(\rho)$ est explicitement décrite en donnant une famille de générateurs

Definition 5

On note A_n le p-sous-groupe de Sylow du groupe de classes de F_n, et on pose

$$A_\infty = \varprojlim_n A_n,$$

pour les applications norme.

Definition 6

On note $\mathcal{E}_n$ le groupe des unités de F_n. On note $\widehat{\mathcal{E}}_n$ le pro-p-complété de $\mathcal{E}_n$, et on pose alors

$$\widehat{\mathcal{E}}_\infty = \varprojlim_n \widehat{\mathcal{E}}_n,$$

PROBLÈME II : On veut comparer

$$A_\infty \quad et \quad \widehat{\mathcal{E}}_\infty/\widehat{St}_\infty$$

comme Λ-modules.

STRATÉGIE : On décompose tous les objets en utilisant les caractères p-adiques du sous-groupe de torsion Δ de $Gal(F_\infty/K)$. Fixons alors un caractère p-adique

$$\psi \ : \Delta \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times .$$

La suite de notre stratégie consiste à remplacer la $\mathbb{Z}_p$-algèbre Λ par le produit tensoriel

$$\Lambda_\psi = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} \mathbb{Z}_p[\psi].$$

C'est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre et un anneau intègre, noetherien, local, complet, régulier de dimension 2 et même factoriel. Il est isomorphe à l'anneau de séries formelles $\mathbb{Z}_p[\psi][[T]]$. Le produit tensoriel $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda_\psi$ est un anneau principal.
On remplacera tous nos Λ-modules M par les Λ_ψ-modules

$$M_\psi = M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} \mathbb{Z}_p[\psi].$$

Le théorème de structure des Λ-modules affirme que pour tout Λ_ψ-module M_ψ de type fini et de Λ_ψ-torsion, il existe des éléments non nuls $f_1, \ldots, f_r$ de Λ_ψ et un homomorphisme injectif

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \Lambda_\psi / (f_i) \hookrightarrow M_\psi$$

dont le conoyau est fini. L'idéal de Λ_ψ engendré par le produit $f_1 \ldots f_r$ ne dépend que de M_ψ c'est l'idéal caractéristique de M_ψ qu'on note $\mathrm{char}(M_\psi)$.

Theorem 7

(J. Assim, Y. MAZIGH et H. Oukhaba 2016) Sous certaines hypothèses raisonnables on a

$$\mathrm{char}((A_\infty)_\psi) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{St_\infty})_\psi).$$

La démonstration du théorème se fait en trois étapes :
1) Nous interprétons nos objets comme des groupes de Selmer.
2) Les unités de Stark, quand elles existent, donnent des systèmes d'Euler pour la représentation

$$T = \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\psi].$$

3) Les systm̀es d'Euler est une machinerie qui permet le contrôle des groupes de Selmer.

Une variante des conjectures de Stark, permettant de relacher les hypothèses que nous avons imposées, prédit l'existence d'éléments dits de Rubin-Stark attachées à des fonctions L plus générales. Younes MAZIGH utilise ces éléments pour démontrer un résultat de divisibilité analogue au théorème ci-dessus, généralisant ainsi au cas non semi-simple les résultats de Büyükboduk obtenus en 2009 et 2011.

MERCI A TOUS